Esercizio. *Si consideri un punto materiale di massa M vincolato a muoversi sulla superficie di una sfera di raggio R centrata nell'origine di un sistema di assi cartesiani. Il punto è soggetto alla gravità ed è attratto dall'asse z da una forza elastica di costante k.*

1. *Si scrivano la Lagrangiana del sistema e le equazioni di Eulero-Lagrange.*
2. *Si determinino le costanti del moto e si riduca il problema ad un grado di libertà.*
3. *Si determini per quali dati iniziali il punto si muove sul parallelo di colatitudine $\theta = \frac{2\pi}{3}$.*
4. *Si calcoli la reazione del vincolo in questi moti.*

1,2. In coordinate sferiche l'energia cinetica del punto è:

$$T = \frac{1}{2}(\dot{x}^2 + \dot{y}^2 + \dot{z}^2) = \frac{1}{2}M(R^2\dot{\theta}^2 + R^2 \sin^2\theta\, \dot{\phi}^2)$$

e l'energia potenziale è

$$U = \frac{1}{2}k(x^2 + y^2) + Mgz = \frac{1}{2}kR^2 \sin^2\theta + MgR\cos\theta.$$

Le equazioni di Eulero Lagrange associate alla Lagrangiana $L = T - U$ sono

$$\begin{aligned}
&\frac{d}{dt}(MR^2 \sin^2\theta\dot{\phi}) = 0\\
&\frac{d}{dt}(MR^2\dot{\theta}) = MR^2 \sin\theta\cos\theta\, \dot{\phi}^2 - kR^2 \sin\theta\cos\theta + MgR\sin\theta
\end{aligned}$$

La prima ci dice che la quantità

$$MR^2 \sin^2\theta\dot{\phi} = l$$

è costante sulle soluzioni. Tenuto conto di questo fatto possiamo scrivere la seconda nella forma

$$\ddot{\theta} = -\frac{\partial U_{eff}}{\partial\theta}$$

con

$$U_{eff}(\theta) = \frac{1}{2}\frac{l^2}{M^2R^4\sin^2\theta} - \frac{1}{4}\frac{k}{M}\cos 2\theta + \frac{g}{R}\cos\theta.$$

Si osservi che oltre alla costante del moto l vi è una seconda costante del moto (l'integrale primo di Jacobi):

$$T + U = \frac{1}{2}M(R^2\dot{\theta}^2 + R^2 \sin^2\theta\, \dot{\phi}^2) + \frac{1}{2}kR^2 \sin^2\theta + MgR\cos\theta.$$

legata al fatto che la Lagrangiana non dipende esplicitamente dal tempo.

3. Cerchiamo adesso soluzioni delle equazioni di Lagrange della forma

$$\theta(t) = \frac{2\pi}{3}.$$

Queste soluzioni (se esistono) sono tali che

$$\dot{\phi} = \frac{l}{MR^2}\frac{4}{3}.$$

Sostituendo nella seconda equazione di Lagrange otteniamo la condizione

$$\frac{16}{9}\frac{l^2}{M^2R^4} = \left(\frac{k}{M} + \frac{2g}{R}\right). \tag{1}$$

Le condizioni iniziali dovranno dunque avere la forma

$$\phi(0) = \phi_0,\ \dot{\phi}(0) = \frac{l}{MR^2}\frac{4}{3},\ \theta(0) = \frac{2\pi}{3},\ \dot{\theta}(0) = 0$$

dove l soddisfa la condizione (1).

4. Per quanto riguarda la reazione vincolare $\mathbf{R} = (R_x, R_y, R_z)$ essa si ottiene dalle equazioni di Newton

$$\begin{aligned}
m\ddot{x} &= -\frac{\partial U}{\partial x} + R_x = -kx + R_x &(2)\\
m\ddot{y} &= -\frac{\partial U}{\partial y} + R_y = -ky + R_y &(3)\\
m\ddot{z} &= -\frac{\partial U}{\partial z} + R_z = -Mg + R_z &(4)\\
& &(5)
\end{aligned}$$

Tenuto conto che per i moti che ci interessano $\dot{\theta} = \ddot{\theta} = \ddot{\phi} = 0$ abbiamo

$$\begin{aligned}
\ddot{x} &= -R\sin\theta\cos\phi\,\dot{\phi}^2 = -R\frac{\sqrt{3}}{2}\cos\phi\left(\frac{16}{9}\frac{l^2}{M^2R^4}\right)\\
\ddot{y} &= -R\sin\theta\sin\phi\,\dot{\phi}^2 = -R\frac{\sqrt{3}}{2}\sin\phi\left(\frac{16}{9}\frac{l^2}{M^2R^4}\right)\\
\ddot{z} &= 0,
\end{aligned}$$

la reazione vincolare è

$$\begin{aligned}
R_x &= -MR\frac{\sqrt{3}}{2}\cos\phi\left(\frac{16}{9}\frac{l^2}{M^2R^4}\right) + kR\frac{\sqrt{3}}{2}\cos\phi\\
R_y &= -MR\frac{\sqrt{3}}{2}\sin\phi\left(\frac{16}{9}\frac{l^2}{M^2R^4}\right) + kR\frac{\sqrt{3}}{2}\sin\phi\\
R_z &= Mg
\end{aligned}$$

Usando l'identità (1) otteniamo

$$\mathbf{R} = -\frac{Mg}{R}(\sqrt{3}\cos\phi, \sqrt{3}\sin\phi, -1).$$

Com'era lecito aspettarsi essa è ortogonale alla superficie della sfera. Infatti essa è proporzionale al gradiente della funzione $F(x, y, z) = x^2 + y^2 + z^2$ valutato sui punti del parallelo $\theta = \frac{2\pi}{3}$:

$$\nabla F = (2x, 2y, 2z) = (\sqrt{3}\cos\phi, \sqrt{3}\sin\phi, -1).$$